Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
Избердеевская средняя общеобразовательная школа имени Героя Советского Союза В.В.Кораблина Петровского района Тамбовской области

Мастер – класс «Решение заданий №14 Единого Государственного экзамена по математике координатно-векторным методом»

Подготовил
учитель математики
Дубонина Галина Истахоровна

2017 г.

В стереометрии используется два основных метода решения задач. Первый — классический — требует отличного знания аксиом и теорем стереометрии, логики, умения построить чертеж и свести объемную задачу к планиметрической. Способ хорош тем, что развивает мозги и пространственное воображение.

Но если у ученика 11 класса имеются серьезные проблемы с пониманием определений, с чтением или построением сложного стереометрического рисунка, если ему никак не удается подобрать необходимые дополнительные построения, то по мнению многих педагогов стоит заняться изучением второго координатно-векторного метода.

Метод координат — весьма эффективный и универсальный способ нахождения любых углов или расстояний между стереометрическими объектами в пространстве. Это простые формулы, алгоритмы и правила. Стоит отметить, что изучение метода координат является неотъемлемой частью школьного курса геометрии, поэтому методика изучения метода координат может позволить выпускнику, нацеленного на высокий балл при сдаче Единого Государственного экзамена применять его при решении стереометрической задачи №14.

Однако учитель должен объяснить ученику, что это лишь вспомогательный метод. Этот метод не всегда является рациональным и продуктивным.

Решая ту или иную математическую или физическую задачу методом координат, можно использовать различные координатные системы, выбирая ту из них, в которой задача решается проще или удобнее в данном конкретном случае. Существует множество систем координат: аффинная, полярная, биполярная, коническая, параболическая, проективная, сферическая, цилиндрическая и др. Наиболее используемая из них —прямоугольная система координат (также известная как декартова система координат), которая и используется при решении стереометрических задач на экзамене.

Данный метод решения заключается во введении (привязке к исследуемым фигурам) декартовой системы координат, а затем – исчислении образующихся векторов (их длин и углов между ними).

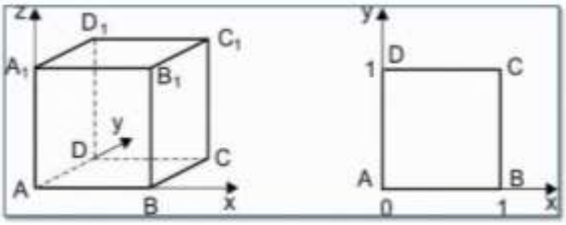
Достоинство метода координат состоит в том, что его применение избавляет от необходимости прибегать к наглядному представлению сложных пространственных конфигураций.

Алгоритм применения метода координат к решению геометрических задач сводится к следующему:

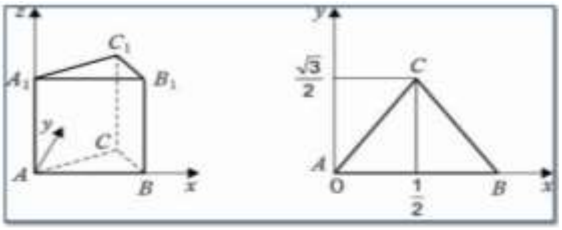
I. Выбираем в пространстве систему координат из соображений удобства выражения координат и наглядности изображения. По условиям задачи №14 никаких координат нет. Для этого необходимо в зависимости от вида многогранника правильно ввести систему координат. Причем результат решения не зависит от того какую точку выбрать за начало координат. Главное, чтобы координаты точек просчитывались как можно проще.

II. Находим координаты необходимых для нас точек. Ниже представлены способы размещения некоторых многогранников в систему координат.

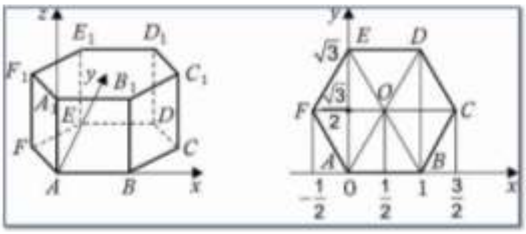
Куб



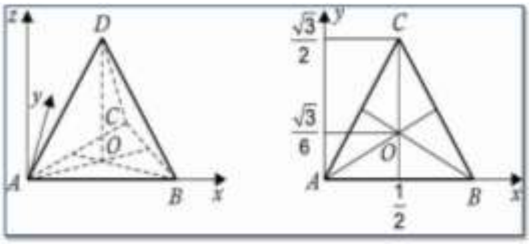
Правильная треугольная призма



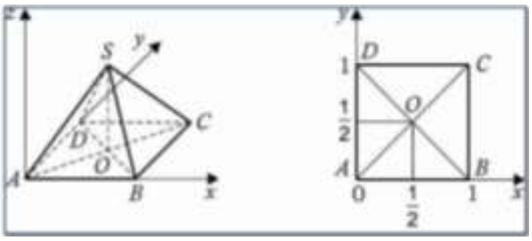
Правильная шестиугольная призма



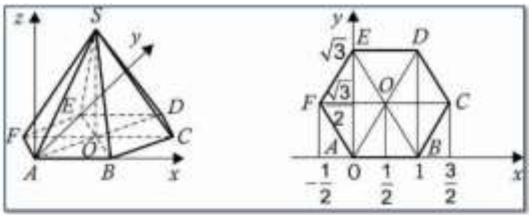
Правильная треугольная пирамида



Правильная четырехугольная пирамида



Правильная шестиугольная пирамида



III. Решаем задачу, используя основные задачи метода координат. Перед решением стереометрических задач координатно-векторным методом стоит запомнить следующие формулы:

1. Формула вычисления расстояния между двумя точками A(x_a, y_a, z_a) и B(x_b, y_b, z_b) в пространстве:

$$AB = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2}$$

2. Формула вычисления координат середины отрезка с концами A(x_a, y_a, z_a) и B(x_b, y_b, z_b) в пространстве:

$$x_c = \frac{x_a + x_b}{2};\ \ y_c = \frac{y_a + y_b}{2};\ \ z_c = \frac{z_a + z_b}{2}$$

3. Общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

4. Если задано уравнение плоскости Ax + By + Cz + D = 0, то расстояние от точки M(M_x, M_y, M_z) до плоскости можно найти, используя следующую формулу:

$$d = \frac{|A \cdot M_x + B \cdot M_y + C \cdot M_z + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

5. Если задано уравнение плоскости Ax + By + Cz + D = 0, то расстояние от точки $M(M_x, M_y)$ до прямой можно найти, используя следующую формулу:

$$d = \frac{\left|A \cdot M_x + B \cdot M_y + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

6. Если заданы уравнения параллельных плоскостей $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ и $Ax + By + Cz + D_2 = 0$, то расстояние между плоскостями можно найти, используя следующую формулу:

$$d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

7. Если $\vec{s} = \{m; n; p\}$ - направляющий вектор прямой L, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ - точка лежащая на прямой, тогда расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до прямой L можно найти, используя формулу:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{M_0 M_1} \cdot \vec{s}\right|}{\overrightarrow{|s|}}$$

8. Если заданы уравнения плоскостей $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ и $Ax + By + Cz + D_2=0$ то угол между плоскостями можно найти, используя следующую формулу:

$$cos\alpha = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2|}{\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2 + {C_1}^2} \cdot \sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2 + {C_2}^2}}$$

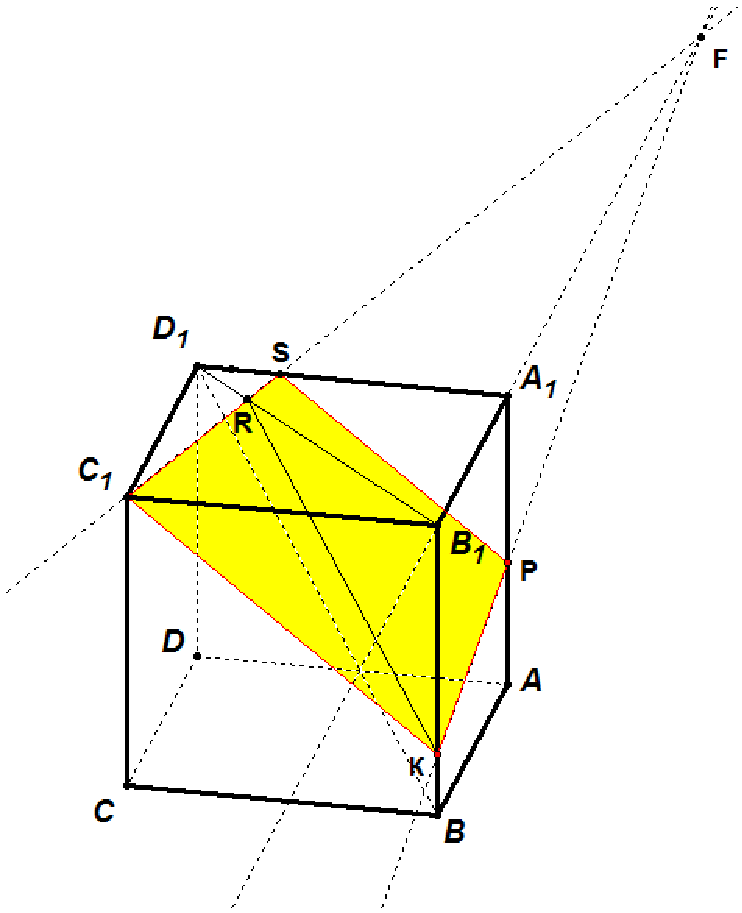
9. Если в пространстве заданы направляющий вектор прямой L $\vec{s} = \{l; m; n\}$ и уравнение плоскости Ax + By + Cz + D = 0, то угол между этой прямой и плоскостью можно найти используя формулу:

$$sin\alpha = \frac{|A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

IV. Переходим от аналитических соотношений к геометрическим.

Для разработки методики формирования умения применять координатный метод важно выявить требования, которые предъявляет логическая структура решения задач мышлению решающего. Координатный метод предусматривает наличие у обучающихся умений и навыков, способствующих применению данного метода на практике. Ниже приведено решение одной задачи двумя методами (классический и координатный), которое показывает эффективность, рациональность и удобство применения второго векторно-координатного метода.

Задача №14: В прямоугольном параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка К лежит на ребре BB_1 так, что $KB{:}KB_1 = 1{:}4$. Плоскость α, проходящая через точки K и C_1 параллельно прямой BD_1, пересекает ребро AA_1 в точке Р. Докажите, что $AP{:}A_1P = 2{:}3$.



Проведем в плоскости BB_1D $KR||BD_1$.

Тогда плоскость α будет проходить через точки K_1C_1 и R.

$\left.\begin{array}{l} C_1R\cap C_1B_1 \\ C_1B_1||A_1D_1 \end{array}\right| \Rightarrow C_1R \cap A_1D_1$

Пусть $C_1R \cap A_1D_1 = S$

$\left.\begin{array}{l} C_1R\cap C_1D_1 \\ C_1D_1||A_1B_1 \end{array}\right| \Rightarrow C_1R \cap A_1B_1$

Пусть $C_1R \cap A_1B_1 = F$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha \cap A_1B_1C_1D_1 = C_1S \\ \alpha \cap ABB_1C_1 = KF \end{array}\right| \Rightarrow KF \cap AA_1 = P \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha \cap ADD_1A_1 = SP$

$\alpha \cap BCC_1B_1 = C_1K$

Получаем KC_1SP — сечение параллелепипеда плоскостью α.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{KB}{KB_1}=\frac{1}{4} \\ BD_1||KR \end{array}\right| \xRightarrow{\substack{\text{по свойству пропорци–} \\ \text{ональных отрезков}}} \frac{D_1R}{RB_1} = \frac{1}{4}$$

Рассмотрим ΔD_1RS и ΔB_1RC_1:

$$\left.\begin{array}{c}\angle D_1RS=\angle B_1RC_1 \text{ (как вертикальные)}\\ \angle SD_1R=\angle C_1B_1R \text{ (как вн.н.л.при ||−ых прямых)}\end{array}\right| \Rightarrow \quad \Delta D_1RS \sim \Delta B_1RC_1$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c}\dfrac{D_1S}{B_1C_1}=\dfrac{D_1R}{RB_1}=\dfrac{1}{4}\\ B_1C_1=D_1A_1\end{array}\right| \Rightarrow \frac{A_1S}{C_1B_1}=\frac{3}{4}$$

Рассмотрим $\Delta C_1B_1\mathrm{F}$ и $\Delta \mathrm{C}A_1\mathrm{F}$:

$$\left.\begin{array}{c}\angle C_1B_1\mathrm{F}=\angle \mathrm{S}A_1\mathrm{F}=90^{O}\\ \angle SFA_1\text{−общий}\end{array}\right| \Rightarrow \quad \Delta C_1B_1\mathrm{F} \sim \Delta \mathrm{C}A_1\mathrm{F}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{A_1S}{C_1B_1}=\frac{A_1\mathrm{F}}{B_1\mathrm{F}}=\frac{3}{4}\right| \Rightarrow \frac{A_1\mathrm{F}}{B_1A_1}=\frac{3}{1}$$

В плоскости $\mathrm{AB}B_1A_1$ проведем $KM||AB||A_1B_1$, тогда KMA_1B_1 − параллелограмм

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c}KB_1=A_1M\\ KM=A_1B_1\end{array}\right| \Rightarrow BK=AM$$

Имеем: $$\left.\begin{array}{c}BK=AM\\ \dfrac{KB}{KB_1}=\dfrac{1}{4}\end{array}\right| \Rightarrow \frac{AM}{MA_1}=\frac{1}{4}$$

Рассмотрим $\Delta \mathrm{F}A_1\mathrm{P}$ и $\Delta\mathrm{KMP}$:

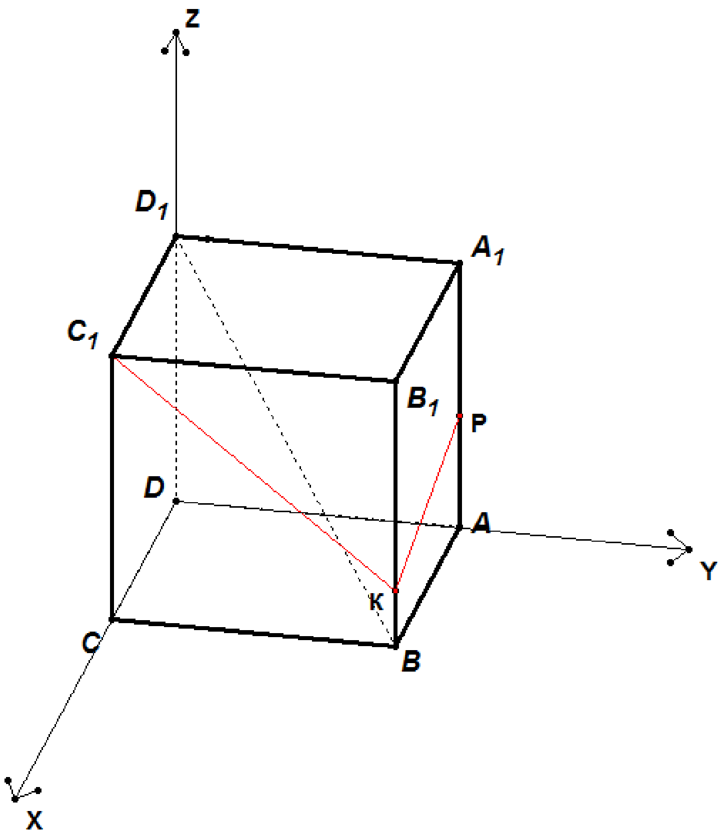
$$\left.\begin{array}{c}\angle A_1\mathrm{PF}=\angle \mathrm{MPK} \text{ (как вертикальные)}\\ \angle PKM=\angle PFA_1 \text{ (как вн. н. л. при || − ых прямых)}\end{array}\right| \Rightarrow \quad \Delta \mathrm{F}A_1\mathrm{P} \sim \Delta\mathrm{KMP}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c}\dfrac{A_1\mathrm{F}}{MK}=\dfrac{PA_1}{PM}\\ MK=B_1A_1\end{array}\right| \Rightarrow \frac{A_1\mathrm{F}}{B_1A_1}=\frac{PA_1}{PM}=\frac{3}{1}$$

Пусть $PM=x$, тогда $PA_1=3x \Rightarrow \left.\begin{array}{c}MA_1=4x\\ \dfrac{\mathrm{AM}}{MA_1}=\dfrac{1}{4}\end{array}\right| \Rightarrow AM=x \Rightarrow \left.\begin{array}{c}AP=2x\\ PA_1=3x\end{array}\right| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AP}{PA_1}=\frac{2\mathrm{x}}{3\mathrm{x}}=\frac{2}{3}$$

чтд



$$\left.\begin{array}{c} C_1(x_0;0;z_0) \\ K(x_0;y_0;\frac{1}{5}z_0) \\ P(0;y_0;kz_0) \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} Ax_0 + Cz_0 + D = 0 \\ Ax_0 + By_0 + \frac{1}{5}Cz_0 + D = 0 \\ By_0 + kCz_0 + D = 0 \end{cases}$$

$$Cz_0 - By_0 - \frac{1}{5}Cz_0 = 0$$

$$By_0 = Cz_0\left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

Пусть $D = 1 \Rightarrow$

$$By_0 = \frac{4}{5}Cz_0$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\frac{4}{5}Cz_0}{y_0} = \frac{\frac{4}{5}Cz_0}{y_0} = \frac{\frac{4}{5}\frac{-1}{z_0(\frac{4}{5}+k)}z_0}{y_0} = \frac{-\boldsymbol{\frac{4}{5}}}{\boldsymbol{y_0(\frac{4}{5}+k)}}$$

Из третьего уравнения системы:

$$\frac{\frac{4}{5}Cz_0}{y_0} \cdot y_0 + kCz_0 + 1 = 0$$

$$\frac{4}{5}Cz_0 + kCz_0 + 1 = 0$$

$$\boldsymbol{C} = \frac{\boldsymbol{-1}}{\boldsymbol{z_0(\frac{4}{5}+k)}}$$

Из первого уравнения системы:

$$\mathrm{A}x_0 - \frac{1}{z_0(\frac{4}{5}+k)} \cdot z_0 + 1 = 0$$

$$\mathrm{A}x_0 = \frac{1}{\left(\frac{4}{5}+k\right)} - 1 = 0$$

$$\mathbf{A} = \frac{\boldsymbol{\frac{1}{5} - k}}{\boldsymbol{x_0(\frac{4}{5}+k)}}$$

Угол между секущей плоскостью и прямой D_1B равен нулю.

Следовательно $\sin(\alpha; D_1B\ ) = 0^{\circ} \Rightarrow$

$$\sin(\alpha; D_1B\ ) = \frac{|A\cdot l + B\cdot m + C\cdot n|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}} = 0 \Rightarrow |A\cdot l + B\cdot m + C\cdot n| = 0$$

$$\frac{\frac{1}{5}-k}{x_0(\frac{4}{5}+k)}\cdot x_0 + \frac{-\frac{4}{5}}{y_0\left(\frac{4}{5}+k\right)}\cdot y_0 + \frac{-1}{z_0\left(\frac{4}{5}+k\right)}\cdot z_0 = 0$$

$$\frac{1}{5} - k - \frac{4}{5} + 1 = 0$$

$$k = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{AP}{PA_1} = \frac{2}{3}$$

ЧТД

Разбирая данную задачу можно определить какие умения нужны для того, чтобы научиться использовать метод координат. Итак,

1) переводить геометрический язык на аналитический;
2) строить точку по заданным координатам;
3) находить координаты заданных точек;
4) вычислять расстояние между точками, заданными координатами;
5) вычислять расстояние между прямой и плоскостью, прямыми и плоскостями;
6) вычислять угол между прямой и плоскостью, прямыми и плоскостями;
7) оптимально выбирать систему координат;
8) составлять уравнения заданных фигур (плоскости и прямые) и вычислять определитель;
9) видеть за уравнением конкретный геометрический образ;
10) выполнять преобразование алгебраических соотношений.

Следовательно, все задачи, которые развивают вышеуказанные умения, являются задачами, обучающими координатному методу.

Метод координат является необходимой составляющей при изучении геометрии в школе. Этот метод позволяет упростить процесс и сократить ход решения задачи, помогает учащимся при сдаче ЕГЭ, а, в дальнейшем, и при изучении математики в высших учебных заведениях.